数理解析研究所講究録
45巻 1968年 97-116

D.P.による最適制御

九大理　北川敏男
(1968年3月28日)

§1. はしがき(1)　R. Bellman [1]～[3](2)によつて創建された動的計畫法 dynamic programming で取扱われているものは、配分過程、選択過程、決定過程等の名稱でよばれる種々の場合があるが、制御過程もまた重要な研究対象である。制御過程に関しては、このほかに R. Bellman [4]～[5] 及び R. Bellman & S. Dreyfus [6] 以後これまで多数の論著があるが、他の過程の多くとは異なり、古典的な接近と比較して、その優劣、その特性を検討しうる場面が多くなる。(4) 標題に限定してみたとき、そこに多くの問題が残されているように思われる。この報告では、そのような残された問題のいくつかのうち、~~○○~~ 3つだけを特に取りあげて、いままでどのような結果がえられているかを報告する。D.P.の建立者じしん、この種の問題の所在が当然気にかかつていたわけであるが、なお未解決なことが多い。

§2. 収束問題　x 及び c は N 次元ベクトル，y は M 次元ベクトルとする．$x=x(t)$，$y=y(t)$ に関して汎関数

$$(1) \qquad J(y)=\int_0^T F(x,y)\,dt$$

を最大にする問題をとり扱う．ただしここに

$$(2) \qquad \begin{array}{ll} (a) & \dfrac{dx}{dt}=G(x,y), \quad x(0)=c \ (\text{所与}) \\ (b) & R_i(x,y)\leqq 0, \quad i=1,2,\cdots,K \end{array}$$

なる関係があるとする．上述の最大を求めるという意味はこのような y に関してである．(5)

これに関する接近法としては，積分(1)を有限和でおきかえる近似をもとにして

$$(3) \qquad J_1(y)=\sum_{k=0}^{n} F(x(k),y(k))\Delta$$

さらに(2)を近似するのに

$$(4) \qquad \begin{array}{ll} (a) & x(k+1)=x(k)+G(x(k),y(k))\Delta, \quad x(0)=c \\ (b) & R_i(x(k),y(k))\leqq 0 \quad (i=1,2,\cdots,K) \end{array}$$

ただし

$$(5) \qquad \begin{array}{ll} (a) & \Delta=T/n \\ (b) & x(k)\equiv x(kT/n), \quad y(k)\equiv y(kT/n) \end{array}$$

を用いる．$\underset{\{y\}}{\mathrm{Max}}\, J_1(y)$，(ここに $\underset{\{y\}}{\mathrm{Max}}$ は $[y(0),y(1),\cdots,y(N)]$ に関してであるが)を求め，$n\to\infty$ を考える．問題は F，G ないし R_i にどんな条件を与えたら，

(6) $$\lim_{n\to\infty} \underset{\{y\}}{\mathrm{Max}}\, J_n(y) = J$$

という極限が存在するか。ただし $n\to\infty$ は（止むをえない）場合によっては、ある特殊の整数列をとってもよい。これについては、次の結果が知られている。$\Delta = T/n$ として固定しておき、$k=0,1,2,\cdots,n$ に対して $f_k(c)$ を次のように定義する。

(7) $$f_k(c) = \underset{\{y\}}{\mathrm{Max}} \left[\Delta \cdot \sum_{j=0}^{k} F(x(j), y(j)) \right]$$

ここに

(8) (a) $$x(j+1) = x(j) + \Delta \cdot G(x(j), y(j)), \quad x(0) = c$$

(b) $$R_i(x(j), y(j)) \leqq 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, \mathrm{I})$$

Maximization は $[y(0), y(1), \cdots, y(k)]$ について行う。

D.P.的接近として最適性原理の應用によって得られる漸化関係は次の通りである

(9) $$f_{k+1}(c) = \underset{y(0)}{\mathrm{Max}} \left[\Delta \cdot F(c, y(0)) + f_k(c + \Delta \cdot G(c, y(0)) \right.$$

ここに

(10) $$f_0(c) = \underset{y(0)}{\mathrm{Max}}\, \Delta \cdot F(c, y(0))$$

また ここに

(11) $$R_i(c, y(0)) \leqq 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, \mathrm{I}$$

さて，これについて次の結果がある．

定理（R. Bellman [7]）次の仮定を設ける．

(a) 定数 m_1, m_2 があって $-\infty < m_1 \leqq y \leqq m_2 < \infty$

(12) (b)[6] 正の定数 c_1 があって $-c_1 \leqq x \leqq c_1$, $m_1 \leqq y \leqq m_2$ において，関数 $F(x, y)$ および $G(x, y)$ は (x, y) の関数として連続であり，かつ $(2 \geqq)\, a^2 + a > 1$ をみたすある正数 a について，ある k に対して

$$|F(x_1, y) - F(x_2, y)| \leqq k|x_1 - x_2|^a$$

$$|G(x_1, y) - G(x_2, y)| \leqq k|x_1 - x_2|^a$$

(c) $|G(x, y)| \leqq a_1|x| + b_1$ が (b)の~~上述~~の領域で成立つ．ここに a_1, b_1 は (x, y) に無関係の定数．

この条件のもとで，(9)で定義された $\{f_n(c)\}$ は，$n = 2^k$（k 自然数），$k \to \infty$ のとき，充分小さな T に対しては，ある c の区間 $[-c_2, c_2]$ において，c に関して一様にある関数 $f(c, T)$ に収束する．ただし $0 < c_2 \leqq c_1$ であり，c_2 の値は上述の定数 m_i 等，k, a, a_1, b_1 に一般に依存する．

この結果は，*the best possible* かどうかは判らない．F および G の連続性，y の一様有界だけでは解は存在しないかも知れないが，反例はあげられていない．また上述の $a^2 + a > 1$ という制約が決定的かどうかも判らない．（$a^2 + a = 1$ の正根は $a = (-1 + \sqrt{5})/2 \cong 0.62$．ただ二点だけは注意すべき値するであろう．

第1には、この種の discrete version のもつ近似解としての意味を詳しく検討することが必要である。

第2には、ある種の問題では、continuous version 自身の意味が必ずしも明確でないことが、制御過程では、起りうる。このような場面では、極限操作で収束が保証されれば、それ自体が、continuous version の1つとして見做されうることになるかも知れない。この点を立入って見る必要があること。

第1の点は§3において、第2の点は§4において、それぞれ詳しく論究する。

§3. 準線形化の方法 (quasilinearization procedure)

これに関しては、R. Bellman & R. Kalaba [8] がある。その要点を次に紹介しよう。

(1°) 現代の電子計算機にとっては、初期値の complete set が指定された常微分方程式の解を数値的にもとめる問題は、それの境界値問題にくらべても、偏微分方程式、定差方程式等にくらべても、比較的求めやすい。D.P.的接近では、新しい状態変数を導入し、時間、空間、構造等のいずれかにおける semi-group の性質を用いて、問題をこのような常微分方程式の初期値問題へ還元させる方向をとっていることが多い。

(2°) 準線形化法の起源は、D.P.にあると Bellman 達はいう。この方法には、いろいろの考え方との関連があるが、関数空間における Newton–Raphson–Kantorovich 近似法とも関連があるといえる。その目的は、次の三点にあるといえよう。

(i) 常及偏微分方程式の初期値ならびに境界値問題に対して，解の存在及び一意性に対する定理を，一貫した方法で与えようとすること。

(ii) 線形方程式の解を用いて，近似解を与えようとすること、

(iii) 微分方程式に関する descriptive problems および variational problems にも適用できる方法を与えること。

これら3つの目的がどれだけ達成されたかを次に紹介する。

(3°) 第1章 Riccati 方程式

ここでは Newton-Raphson 方法を $f(x)=0$ の根をもとめる場合について解説する。$f(x)$ をすべての x に関して単調減少、純凸(下に)とする。根 r において $f(r)=0$, $f'(r)<0$. このとき

(1) $$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

で定義するとき

(2)

(a) monotonicity: $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots<r$

(b) quadratic convergence:
$$|x_{n+1}-r|\leqq k|x_n-r|^2$$

この方法を Riccati equation に適用する。このための準備になるのは，次の諸項である。

(i) maximum operation の導入　$y=x^2$ に対してその上の点 $(x_1,y_1)=(x_1,x_1^2)$ で切線をひくと，$y=x^2$ は凸関数であるから切線より下にはない。$x^2\geqq 2x_1x-x_1^2$ すなわち
$$x^2=\max_{x_1}\left[2x_1x-x_1^2\right]$$

(ii) 微分方程式
$$\frac{dw}{dt}-f(t)w=g(t),\quad w(0)=c$$

の解

$$w = C\exp\left\{\int_0^t f(s)ds\right\} + \exp\left\{\int_0^t f(s)ds\right\}\int_0^t g(s)\exp\left\{-\int_0^s f(r)dr\right\}ds$$
$$\equiv T(f, g)$$

については，$t \geqq 0$ のとき，　$g_1(t) \geqq g_2(t) \to T(f, g_1) \geqq T(f, g_2)$

(iii) 微分方程式　$v' = g(v, t)$ に対して近似方式として v_{n+1} に関して線形方程式

$$v_{n+1}' = g(v_n, t) + (v_{n+1} - v_n) g_v(v_n, t),\quad v_{n+1}(0) = c$$

を用いる。

この (i)—(iii) をもとにして次の結果が導かれる。

(a) Riccati 方程式の解

$$\text{(比較)}\left\{\begin{aligned} v' &= -v^2 - p(t)v - q(t) \quad (\text{Riccati}) \\ &= -\max_u [2uv - u^2] - p(t)v - q(t) \quad (\text{max. op}) \\ &= \min_u [u^2 - 2uv - p(t)v - q(t)],\quad v(0) = c \\ w' &= u^2 - 2uw - p(t)w - q(t),\quad w(0) = c \end{aligned}\right.$$

このとき　$w \geqq v$ となる。

定理．$0 \leqq t \leqq t_0$ において

(3)　$$v(t) = \min_u T(-2u - p(t), u^2 - q(t))$$

ここに $[0, t_0]$ は $v(t)$ の存在区域．

(b) 逐次近似法と準線形化法　　$n \geqq 0$ に対して

(4)　$$v_{n+1}' = v_n^2 - 2v_n v_{n+1} - p(t)v_{n+1} - q(t),\quad v_{n+1}(0) = c$$

これは Riccati 方程式に対して Newton-Raphson-Kantorovich 近似方式を適用してえられる。

monotonicity に関しては次のことが見られる。

(5) $\quad v_{n+1}' \geqq v_{n+1}^2 - 2v_{n+1}v_{n+1} - p(t)v_{n+1} - q(t)$

(6) $\quad v_{n+2}' = v_{n+1}^2 - 2v_{n+2}v_{n+1} - p(t)v_{n+2} - q(t), \quad v_{n+2}(0) = c$

(7) $\quad v_{n+1} \geqq v_{n+2} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

(8) $\quad v_n(t) \geqq v(t) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(4°) 第2章 二点境界値問題 ここでは

(9) $\quad u'' = g(u, u', t), \quad h_1(u'(0), u(0)) = 0, \; h_2(u'(1), u(1)) = 0$

において、quasilinearization の方法の適用による quadratic convergence が論究されている。

(5°) 第3章 単調行動と微分不等式[7] 近似列の単調収束を保証する条件の検討のため微分不等式

(10) $\quad u'' + p(t)u' + q(t)u \geqq 0$

の検討にすすむ。

(6°) 第4章 連立微分方程式系、情報の蓄積、微分近似 高階微分方程式及び雑形連立方程式系への拡張にすすむ。階数が高まり、連立方程式の本数が増加するにつれて、数値計算のために、どれだけのデータが蓄積されかつ検索されなければならないかという問題がおこる。

<u>例.1.</u> $\quad u'(t) = g(u(t), u(t-1)) \qquad t \geqq 1$

$\qquad\quad u(t) = u_0(t) \qquad 0 \leqq t \leqq 1$

長さ1の区間における関数値の蓄積。

$$u_n(t) = u(t+n), \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

$$u_1'(t) = g(u_1(t), u_0(t)), \quad u_1(0) = u_0(1)$$

$$u_2'(t) = g(u_2(t), u_1(t)), \quad u_2(0) = u_1(1)$$

& so on.

$$u_i'(t) = g(u_i(t), u_{i-1}(t)), \quad u_i(0) = b_i$$

微分近似 (differential approximation)

ある所与の関数 $u(t)$ を、常数係数の線形微分方程式

(11) $$v^{(N)}+a_1 v^{(N-1)}+\cdots+a_N v=0, \quad v^{(i)}(0)=c_i \ (i=0,\cdots,N-1)$$

によって近似する方法である。ただし

(12) $$\int_0^T (v-u)^2 dt$$

を最小にするように $\{a_i\}$, $\{c_i\}$ をきめるのである。

(7°) 第5章 偏微分方程式 非線型方程式

(13) $$u_{xx}+u_{yy}=e^u$$

(14) $$u_t=u_{xx}+g(u)$$

への quasilinearization technique の応用が示されている。

(8°) 第6章 物理学，工学及び生物学への応用

そこでは quasilinearization の方法の応用がのべられている。

例. 2. 最適制御及び最適設計

(15) (a) $J(y)=\int_0^T g(x,y)dt$ の最小値を求める。

(b) $\dfrac{dx}{dt}=h(x,y)$, $x(0)=c$ という制限が

与えられているとする。 x; M-dimensional, y; N-dimensional vector. 問題は y の決定である。

これらはもっと一般の次の問題にふくまれる。

(16) (a) $J(y,a)=\int_0^T g(x,y,a)dt+\varphi(a)$

(b) $\dfrac{dx}{dt}=h(x,y,a)$, $x(0)=c$

y 及び K 次元ベクトル a の決定。

quasilinearization の方法として次のものがある。
初期近似 y_0, a_0 をとり

(17) $$\frac{dx_0}{dt} = h(x_0, y_0, a_0), \quad x_0(0)=c$$

により x_0 をきめる。次に x_1, y_1, a_1 を求めるために

(18) $$\frac{dx_1}{dt} = h_1(x_1, y_1, a_1 ; x_0, y_0, a_0), \quad x_1(0)=c$$

をおく。ただし h_1 は $h(x, y, a)$ を (x_0, y_0, a_0) のまわりにおいて展開して、一次項までをとり、以上を切りすてたもの。さていで

(19) $$\int_0^T g_2(x_1, y_1, a_1 ; x_0, y_0, a_0)\,dt$$

を最小にするよう、(y_1, a_1) を適当にとるという問題を考える。ただし g_2 は $g(x, y, a)$ を (x_0, y_0, a_0) のまわりにおいて展開したものを、二次項までとり、以上を切りすてたもの。以下この方法をくりかえす。

(90) 第7章 動的計画法と準線形化法

以上の記述では、準線形化法と動的計画法との結びつきが特に顕著という感じはしないかも知れないが、後者が実は準線形化法の起源となったということは、Bellman の場合は事実であった。動的計画法の接近が政策決定を目標とするし、政策への近似こそ準線(最適)形化法の起源となった(最適)のである。この点次例をもって説明しよう。

例3. (20) $$f(p) = \max_q [g(p, q) + f(T(p, q))]$$

いま初期の政策として、$q_0(p)$ を想定し、これを次のようにして改良してゆく。まず $f_0(p)$ を次のようにきめる。

(21) $$f_0(p) = g(p, q_0) + f_0(T(p, q_0))$$

$g_0(p)$の改良として，$g(p,q)+f_0(T(p,q))$を最大にする$q_1(p)$を求める．そして，$f_1(p)$を次の関数方程式の解としてきめる．

(22) $$f_1(p)=g(p,q_1)+f_1(T(p,q_1)),\quad (q_1=q_1(p))$$

以下同様にして，$f_n(p)$をきめてゆく．

例4. $u(a)=c$の条件のもとに

(23) $$J(u)=\int_0^T g(u',u,t)\,dt$$

の最小を求める問題に対して，動的計画法の常とう手段は

(24) $$\min_u J(u)=f(a,c)$$

に対して，非線形偏微分方程式を導く．

(25) $$-\frac{\partial f}{\partial a}=\min_v\left[g(v,c,a)+v\frac{\partial f}{\partial c}\right]$$

を初期条件$f(T,c)=0$のもとで解かなければならない．

これについて，Bellmanは，local quasilinearizationとglobal dynamic programmingとの結合を提唱している。

例5. D.P.的接近により二点境界値問題が回避される例

(26) $$J(u)=\int_0^T[u'^2+b(t)u^2]\,dt,\quad u(a)=c$$

の最小値を求めること．

Euler方程式 $u''-b(t)u=0,\ u(a)=c,\ u'(T)=0$

他方 $\min_u J(u)=f(a,c)$とおき

$$-\frac{\partial f}{\partial a}=\min_v\left[v^2+b(a)c^2+v\frac{\partial f}{\partial c}\right]$$

$(f(T,c)=0)$ はこの場合

$$-\frac{\partial f}{\partial a}=b(a)c^2-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2$$

uはcに一次的に依存するから、$f(a,c)=r(a)c^2$ということがわかる。従って Riccati 方程式 $-r'(a)=b(a)-r(a)^2$ ただし $r(T)=0$, に帰着する。

(10°) 以上を要約すると，D.P.的接近は最適政策への近似を求めることを主眼としている。そこでは maximum operation の導入がつねに伴い，多くの重要な場合において，最適政策への単調収束が成立つ。この事実に着眼し，線形方程式に maximum operation を導入して非線形方程式の解法をもとめるのが，quasilinearization の根本的な考へ方である。ただし monotonicity of convergence をいうためには，微分不等式にもとづく広義の convexity の概念が必要になった。以上の思想は，常微分方程式の初期値問題において有効であるので，多くの他の型の制御方程式を，これによって近似的にあらわそうという方向をとる。このために differential approximation の方法が導入されたといえる。

以上の結果は，大綱を示したものにすぎない。しかしD.P.的接近が具体的な問題の解決に利用されるために必要な道具が用意されつつあるという意味で注目すべきであろう。R. Bellman [9] は，chapter 8 において，

$$(24)\quad \begin{cases} J(x,y)=\int_0^T [(x,Ax)+(y,y)]\,dt \text{ の最小化} \\ x'=Bx+y\ ,\quad x(0)=c \quad (\text{制御方程式}) \\ \int_0^T (x, f_i(t_1))\,dt_1 = a_i \quad (i=1,\cdots,k)\ \text{制約} \end{cases}$$

を論じている。ここに Riccati 方程式があらわれ，monotone convergence in policy space が論議されている。

§4 制御過程へのD.P.的接近と情報の問題

制御過程へのD.P.的接近は，古典的接近に伴ういくつかの困難を克服した。変分学的な接近は (1) 数値解法としては，二点境界値問題の微分方程式を解くことになり，困難が多い。(Queenberry rules!) (2) 制約条件が現実的なものとなると困難が大きくなる。(3) 確定系でなく，確率変動の加わった系となると，古典的方法の適用は一段と困難さを加える。以上(1)～(3)に関して，D.P.的接近がより有利であるとBellmanは絶えず主張し力説している。

制御過程論の展開には，情報科学的な観点が大切である。制御と情報との関連をあきらかにすることなしには，制御過程論の全体は描き出されない。D.P.については次の特徴に注意する必要がある。

(1°) D.P.の方式は，time-oriented でなく，event-oriented である。

(2°) D.P.の方式は，システムの観測手段をもつとき，これによって得られる情報を用いながら，制御を行うのに適している。

(3°) D.P.の方式は，stochastic formulation の場合にも適用できる。

(4°) D.P.の方式は，(a) 制御手段として何が可能であるか，(b) 情報獲得の方法として何が与えられているか，(c) 制約条件として何が課せられているか等々を明確にした上での formulati になっている。

例.6. $J(u)=\int_0^T g(u,u')dt$ のとき $\min_{u\in U} J(u)$ を求めるD.P.的解法　$u(0)=c$ とする。

$\min_{u\in U} J(u)=f(c,T)$ とおく。policy function を $v=v(c,T)$ とおく。$c\to c+v\Delta$, $T\to T-\Delta$ なる変換を考える。

$$J(u)=\int_0^{\Delta}+\int_{\Delta}^{T}$$

から

$$f(c,T) = \underset{v}{Min.}\left[g(c,v)\Delta + f(c+v\Delta, T-\Delta) + O(\Delta^2)\right]$$

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f(c,T)}{\partial T} = \underset{v}{Min.}\left[g(c,v) + v\dfrac{\partial f(c,T)}{\partial c}\right] \\ f(c,0) = 0 \end{cases}$$

この解法は C を知り、T を与えられて policy function $v(c,T)$ を求めることである. ((1°), (2°), (4°))

例 7. Stochastic control process 上述(3°)に関して Bellman の主張していることは, deterministic control process の場合とアナロジーにおいて, 漸化関係式の利用できることをいうようである.

第n時点における状態を x_n; y_n を決定変数; r_n を確率変数とし

$$(29)\quad x_{n+1} = g(x_n, y_n, r_n), \quad x_0 = c.$$

目標関数として

$$(30)\quad F_1 = h(x_1, y_1, r_1) + h(x_2, y_2, r_2) + \cdots + h(x_N, y_N, r_N)$$

の期待値をとり、これを最小にする問題を考える。

$$(31)\quad f_N(c) = \underset{\{y_i\}}{Min}\left[\underset{\{r_i\}}{Exp}\, F_1\right]$$

これについて, 次のような漸化関係が成立つ

$$(32)\quad (a)\quad f_1(c) = \underset{y_1}{Min}\left[Exp\, h(c, y_1, r_1)\right] = \underset{y_1}{Min}\left[\int h(c, y_1, r_1)\, dG(r_1)\right]$$

(b) $N \geqq 2$ に対して

$$f_N(c) = \underset{y_1}{Min}\left[Exp\left[h(x_1, y_1, r_1) + f_{N-1}(g(c, y_1, r_1))\right]\right]$$

$$= \underset{y_1}{Min}\left[\int\left\{h(x_1, y_1, r_1) + f_{N-1}(g(c, y_1, r_1))\right\} dG(r_1)\right]$$

例8. 観測と制御の適用との間の時間のおくれ これを考慮すると differential-difference equations の方が、現実性を帯びてくる。

$$\frac{dx}{dt} = g(x(t), y(t-\tau)), \quad x(0)=c$$
$$\tau = \tau(x, y)$$

とおいてシステムのメカニズムをあらわす。N. N. Oğuztöreli [10] に一般論がある。

ただし、これにはまだ D.P. 的接近は述べられていない。

例9. Large system における control 問題において、次の選択問題に直面する。（例えば生体モデル等）

(i) 僅かのデータをもとにして、速かな決定をくだす。

(ii) 充分の観測を行い豊富なデータをもとにして、決定をくだす。このために決定はおくれる。

この種の問題は、A. A. Fel'dbaum [11] において取りあげられている。しかし D.P. 的接近とはかけ離れている。
M. Aoki [12] においては、stochastic system をまともにとりあげられているが、D.P. 的接近からはこれまた離れている。

標記の問題に立入るためには、制御の利用される場面を広く見渡し、種々の方法のリストをつくり、いままでいろいろな方面で発展した諸方法を比較し、それらの適用範囲をあきらかにして、そのうえで統合をはかり、新方法を開発することが必要である。これに関して筆者は拙論 [1] において、次の諸項においてこれを論じたことがある。

I. 混沌と設計
II. 情報と制御
III. 適応と進化
IV. 未解決の諸問題

§5、結び この報告において，次の諸点を論じた。

〔1〕 D.P.的接近には，その数学的な基礎事項に再検討を必要とすることが多い。§2において，一つの積極的な解答を紹介した。このような方法を一般化することがのぞましい。と同時に真にD.P.的接近が必要とするformulationは何かという問題がまだ明らかにされていないように思われる。

〔2〕、D.P.的接近が実際上有力であるためには，具体的な解へ導く技法があることがのぞましい。準解析法はその一つである。これを§3において紹介した。

〔3〕、制御と情報との関連について，基本的に検討する必要がある。D.P.的接近の意義もこの点からみてゆく必要がある。この点からみた場合のD.P.への評価は，まだ決定的でないように思われる。たゞいえることは，古典的接近よりは，情報のとり入れが明かである。しかし，この問題については，いままでのD.P.的接近にはない多くの方法が導入される必要があるように思われるのであって，最適性原理の適用による関数方程式的接近だけが主役になるとも思われない。

引用文献

[1] R. Bellman: An introduction to the theory of dynamic programming, R-245, Rand Corp. (1953).

[2] R. Bellman: Dynamic programming of continuous processes, R-271, Rand Corp. (1954)

[3] R. Bellman: Dynamic programming, Princeton Univ. press (1957)

[4] R. Bellman, I. Glicksberg & O. A. Gross: Some aspects of the mathematical theory of control processes, R-313, Rand Corp. (1958)

[5] R. Bellman: Adaptive control processes: a guided tour, Princeton Univ. press (1961)

[6] R. Bellman & S. E. Dreyfus: Applied dynamic programming, Princeton Univ. press (1962)

[7] R. Bellman: Functional equations in the theory of dynamic programming — VI, direct convergence proof. Annals of Math. 65 (1957), 215 — 223.

[8] R. Bellman and R. Kalaba: Quasilinearization and nonlinear boundary value problems, Amer. Elsevier Publ. Co. (1965)

[9] R. Bellman: Introduction to the mathematical theory of control processes, I. linear equations and quadratic criteria, Academic Press Inc. (1968)

[10] N. N. Oğuztöreli: Time-lag control systems Academic Press (1965)

[11] A. A. Fel'dbaum: Optimal control systems, Academic press (1965)

[12] N. Namık Oğuztöreli: Time-lag control systems, Academic press (1966)

[13] 北川敏男：制御理論への情報科学的接近，計測自動制御学会 特別講演（1967年7月28日）

補註　(1968年3月28日講演当日)

(1) §1から§5及び31用文献は，1968年3月28日の講演予稿として用意されたものである。これに対して，講演において行った訂正及び補遺は，すべて以下の補註にあるのであるから，この報告の通読には，補註を必ず参照されたい。

(2) 時期は 1953～1957年

(3) これらは，新しい分野の開拓であって，比較しようにも他の方法はない。

(4) 特に変分法とか descriptive theory (control theory) に対していう方とかが比較すべき対象になる。

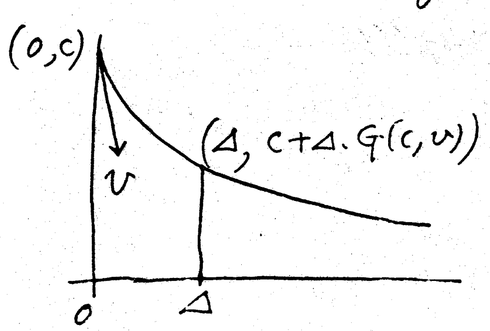
(5) 通常 D.P. 的接近は，周知のように次の推論を出る：

$$J(y)=\int_0^T F(x,y)\,dt$$

$$\min_{y\in D} J(y)=f(c,T) \text{ とおく}$$

そこで

$$\int_0^T F(x,y)\,dt=\int_0^\Delta+\int_\Delta^T$$



$$f(c,T)=\int_0^\Delta F(x,y)\,dt+f(c+\Delta G(c,v),T-\Delta)+O(\Delta^2)$$

$$=F(c,v)\Delta+f(c+\Delta G(c,v),T-\Delta)+O(\Delta^2)$$

$$f(c,T)=\mathrm{Max}\,[F(c,v)\Delta+f(c+\Delta G(c,v),T-\Delta)]+O(\Delta^2)$$

$$f(c+\Delta G(c,v), T-\Delta)$$
$$= f(c,T) + \frac{\partial f}{\partial c}\Delta\cdot G(c,v) - \frac{\partial f}{\partial T}\Delta + O(\Delta^2)$$

これから

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \underset{v}{\mathrm{Max}}\left[F(c,v) + \frac{\partial f(c,T)}{\partial c} G(c,v)\right]$$

を導く。このような導出法が、成書によく引用されているけれども、極めて多くの仮定が入り込んでいることは一見してあきらかである。

(6) 筆者の考えでは

$$|G(x_1,y) - G(x_2,y)| \leqq k_2 \mathrm{Min}(|x_1-x_2|^q, |x_1-x_2|)$$

(7) W. Feller: On second order differential operators, Ann. Math. 61 (1955), 90–105.
筆者は、1957年12月〜1958年4月 Princeton大学で Feller 教授の講義をきいたが、この方面の仕事と密接な関係がある。しかしまだまとめられていない。

(8) G. Polyá: Trans. Amer. Math. Soc. 24 (1922)
原文はいま手許にないが、次のような結果が知られている。

$$L(u) \equiv u^{(N)} + p_1(t)u^{(N-1)} + \cdots + p_N(t)u$$

$$W_n(f_1, f_2, \ldots, f_n) \equiv \begin{vmatrix} f_1(t) & f_1'(t) & \cdots & f_1^{(n-1)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(t) & f_n'(t) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

$$L(u) = \frac{W_N}{W_{N-1}} \frac{d}{dt}\left(\frac{W_{N-1}^2}{W_{N-2}W_N}\frac{d}{dt}\left(\cdots\frac{d}{dt}\left(\frac{W_2^2}{W_1W_3}\frac{d}{dt}\left(\frac{W_1^2}{W_0W_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{W_1}\right)\right)\right)\right)\right)$$

という表現が用いられる。